УНИВЕРСАРИУМ

Графический метод решения задач с параметрами

СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор

Графический метод
решения задач с параметрами

Возможные подходы

Перечислим ***основные подходы*** к решению задач с параметрами:

- *Алгебраический* (введение букв, преобразования)
- *Логический* (рассуждения, следствия, равносильность)
- *Функциональный* (использование функций и их свойств)
- *Графический* (придание геометрического смысла) — о нём и пойдёт речь ниже

Конечно же, существуют и ***другие подходы*** к математическим задачам вообще:

- *Арифметический* (счёт, действия с числами, пропорции)
- *Множественный* (операции с множествами)
- *Вероятностный* (применение теории вероятностей)

и т. д.

Возможные подходы

Графический подход к решению задач с параметрами предполагает использование следующих моделей:

- *Круги Эйлера* (простейшая иллюстрация для множеств, событий, утверждений)
- *Координатная прямая* (числа — точки прямой)
- *Тригонометрическая окружность* (числа — точки окружности с зацикливанием)
- *Координатная плоскость* (пары чисел — точки плоскости или векторы)
- *Тригонометрический круг* (синусы с косинусами — точки плоскости)

Координатная прямая: максимум из двух чисел

Задача 1. *Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство*

$$\frac{x+a}{2}+\frac{|x-a|}{2}+\left|\frac{x+a}{2}+\frac{|x-a|}{2}\right|<6$$

имеет хотя бы одно решение

Алгебраический подход:
решить это неравенство полностью при каждом значении параметра и выбрать те его значения, при которых множество решений не пусто

Возможное упрощение:
можно попытаться изобразить какие-либо ключевые точки на числовой прямой и применить метод интервалов

Трудности:
большое количество случаев и сложная логика их перебора

Координатная прямая: максимум из двух чисел

Задача 1. *Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство*

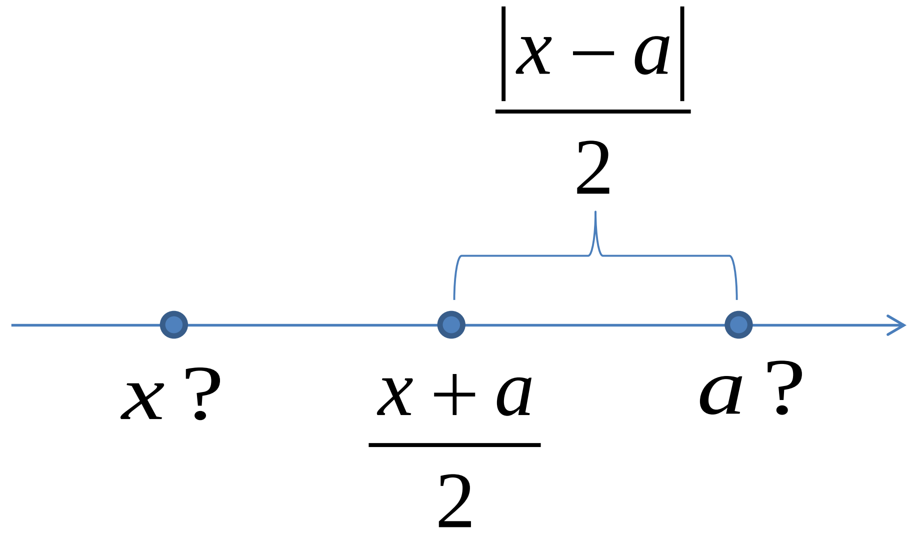
$$\frac{x+a}{2}+\frac{|x-a|}{2}+\left|\frac{x+a}{2}+\frac{|x-a|}{2}\right|<6$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Если отметить на числовой прямой две точки *x* и *a*, то точка $\frac{x+a}{2}$ будет лежать строго посередине между ними. Если же отложить от неё вправо число $\frac{|x-a|}{2}$, то получится правая из двух отмеченных точек. Поэтому сумма

$$y=\frac{x+a}{2}+\frac{|x-a|}{2}=\max\{x,a\}$$

равна наибольшему из чисел *x* и *a*.



Рассуждая аналогично, получаем, что вся левая часть неравенства равна

$$y+|y|=2\left(\frac{y+0}{2}+\frac{|y-0|}{2}\right)=2\max\{y,0\}.$$

Координатная прямая: максимум из двух чисел

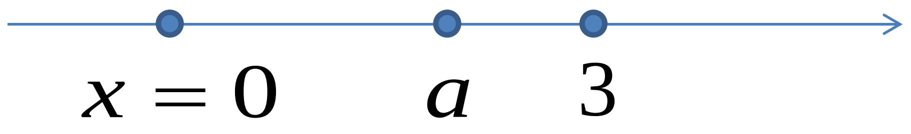
Таким образом, неравенство записывается в виде

$$2\max\{\max\{x, a\}, 0\} < 6 \iff$$
$$\iff \max\{x, a, 0\} < 3.$$

Заметим, что $0 < 3$, поэтому всё зависит только от *x* и *a*
Рассмотрим 2 случая:

1) если $a \geq 3$, то наибольшее из чисел *x, a*, 0 и подавно не меньше 3, а значит, неравенство не выполнено ни при каком *x*;

2) если $a < 3$, то хотя бы при одном x (например, при $x = 0$) наибольшее из чисел *x, a*, 0 меньше 3, а значит, неравенство выполнено.



Ответ: $a < 3.$

Задача 2. *Для каждой пары чисел a и b найдите точку минимума функции*

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2+4} + \sqrt{(x-b)^2+1}$$

Функциональный подход:
исследовать данную функцию с помощью производной и найти точку минимума

Возможное упрощение:
попытаться схематически построить график данной функции

Трудности:
выражение для производной и график функции слишком сложны

Координатная плоскость: расстояние между точками

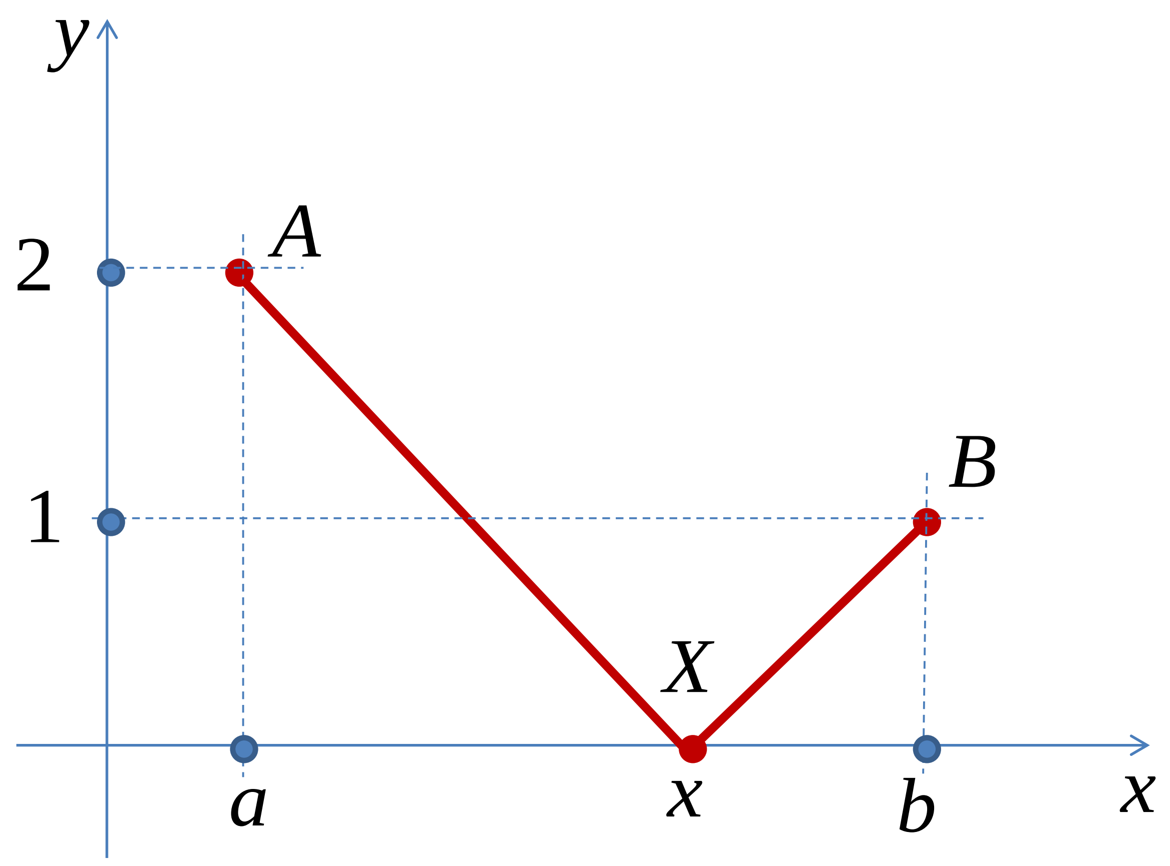
Задача 2. *Для каждой пары чисел a и b найдите точку минимума функции*

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2+4} + \sqrt{(x-b)^2+1}$$

Решение. Запишем функцию в виде

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2+(0-2)^2} + \sqrt{(x-b)^2+(0-1)^2}$$

Тогда каждый квадратный корень можно интерпретировать, как расстояние на координатной плоскости от переменной точки $X = (x, 0)$ до некоторой фиксированной точки: первый — до точки $A = (a, 2)$, второй — до точки $B = (b, 1)$



Таким образом, задача сводится к нахождению такой точки *X*, для которой ломаная *AXB* с данными концами *A* и *B* имеет наименьшую длину

Координатная плоскость: расстояние между точками

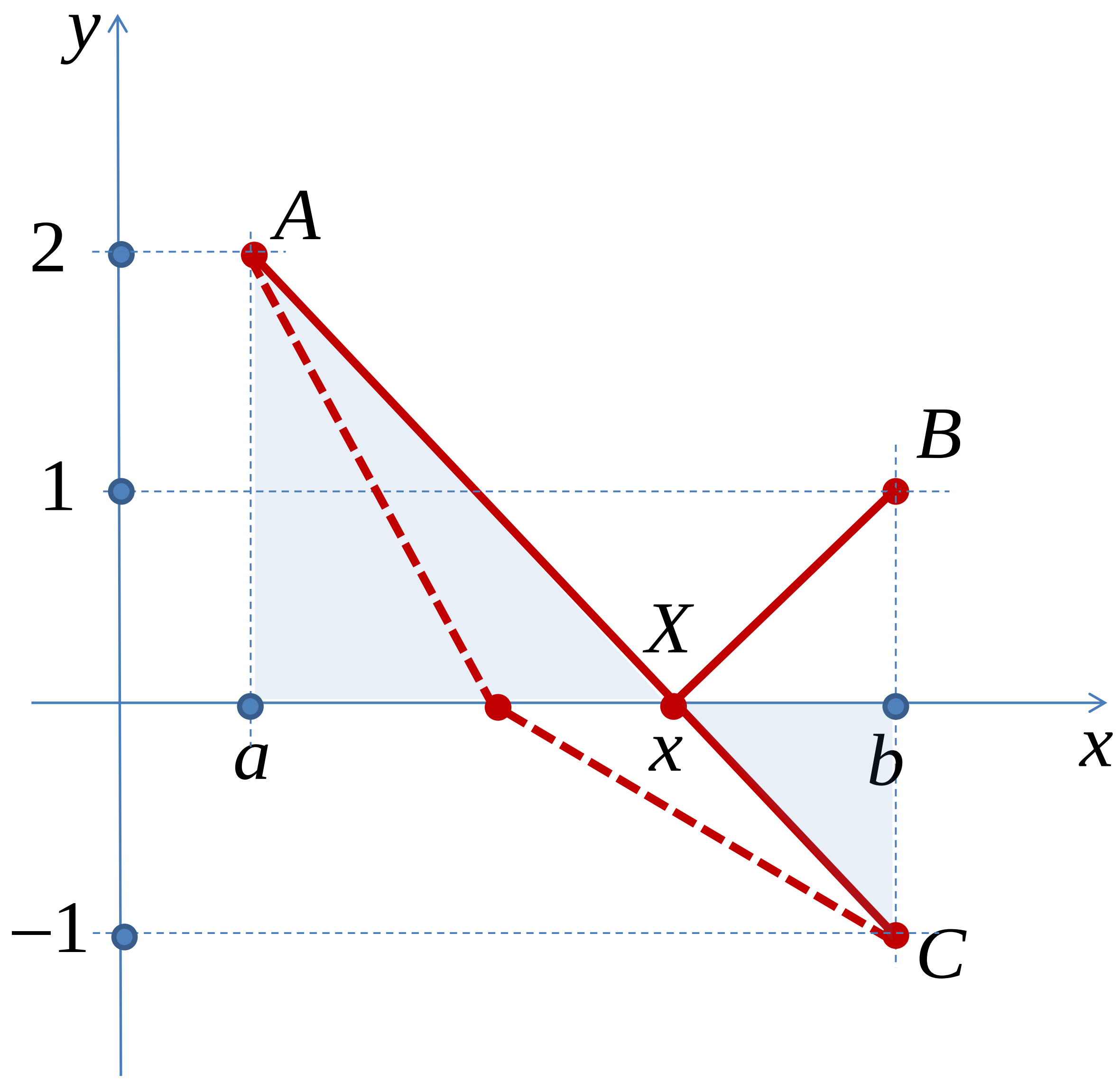
Рассмотрим фиксированную точку $C = (b, -1)$, симметричную точке *B* относительно оси абсцисс, и вместо ломаной *AXB* возьмём ломаную *AXC.* Она имеет ту же длину

Ломаная *AXC* — кратчайшая, когда она сливается с отрезком *AC*

Для нахождения точки *X* используем геометрию. Из подобия двух треугольников с коэффициентом 2 имеем

$$x = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{a+2b}{3}$$

Ответ: $x_{\min} = \frac{a+2b}{3}$



Задача 3. *Какое наибольшее количество решений и при каких значениях а может иметь система*

$$\begin{cases} x^2 + a^2 \leq 9 \\ a^2 + y^2 \leq 16 \\ ax + ay \geq 12 \end{cases}$$

Алгебраический подход:
можно попытаться вывести из неравенств системы какие-либо оценки неизвестных или какие-нибудь другие сильные следствия

Возможное упрощение:
попробовать применить неравенства между средними арифметическим и геометрическим

Трудность:
отсутствуют равенства, поэтому невозможно что-либо одно выразить через что-либо другое

Задача 3. *Какое наибольшее количество решений и при каких значениях a может иметь система*

$$\begin{cases} x^2 + a^2 \leq 9 \\ a^2 + y^2 \leq 16 \\ ax + ay \geq 12 \end{cases}$$

Решение. Введём векторы $u = (x, a)$ и $v = (a, y)$. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} |u| \leq 3 \\ |v| \leq 4 \\ uv \geq 12 \end{cases}$$

где uv — скалярное произведение

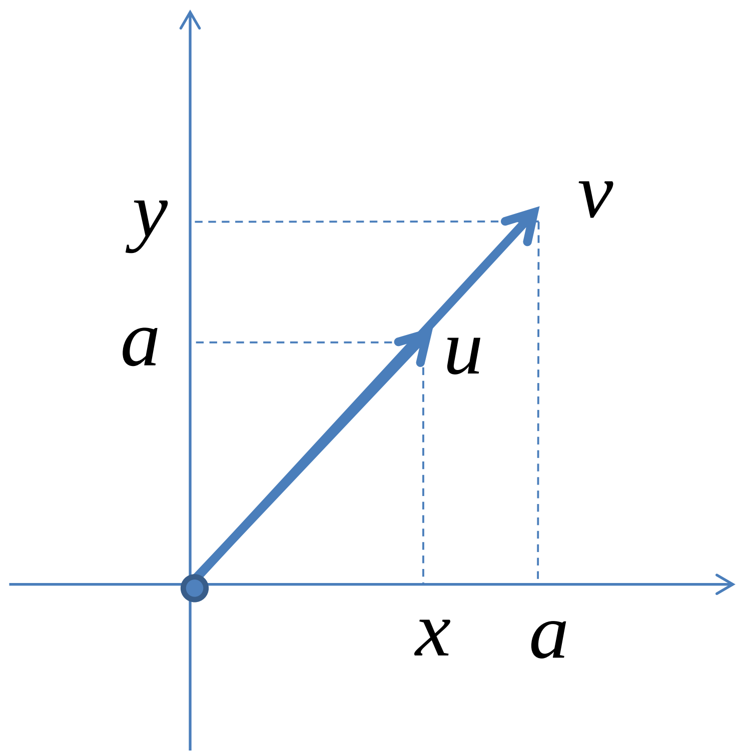
Из полученной системы имеем

$$12 \leq uv = |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v) \leq 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12,$$

откуда $\angle(u, v) = 0$, а все неравенства системы обращаются в равенства

Таким образом, система приводится к виду

$$\begin{cases} v = \dfrac{4}{3}u \\ |u| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4}a \\ y = \dfrac{4}{3}a \\ \left(\dfrac{3}{4}a\right)^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$



Заметим, что если эта система разрешима, то неизвестные выражаются через параметр однозначно. Значение же параметра находим из последнего уравнения системы

$$\left(\frac{9}{16} + 1\right)^2 a^2 = 3^2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{12}{5}$$

Ответ: наибольшее число решений — 1, при $a = \pm 12/5$

Координатная плоскость: графики функций

Задача 4. *Найдите все значения $a \geq 0$, при каждом из которых уравнение*

$$1 + \sqrt{1 - x^2} = |x - a|$$

имеет единственный корень

Алгебраический подход:
решить уравнение при каждом значении параметра и определить, для каких его значений корень единственен

Возможное упрощение:
сделать тригонометрическую подстановку, избавившись от радикала

Трудность:
утомительный перебор случаев, тяжёлые выкладки

Координатная плоскость: графики функций

Задача 4. *Найдите все значения $a \geq 0$, при каждом из которых уравнение*

$$1 + \sqrt{1 - x^2} = |x - a|$$

имеет единственный корень

Решение. Изобразим графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения:

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1^2 \\ y \geq 1, \end{cases}$$

$$y = |x - a|$$

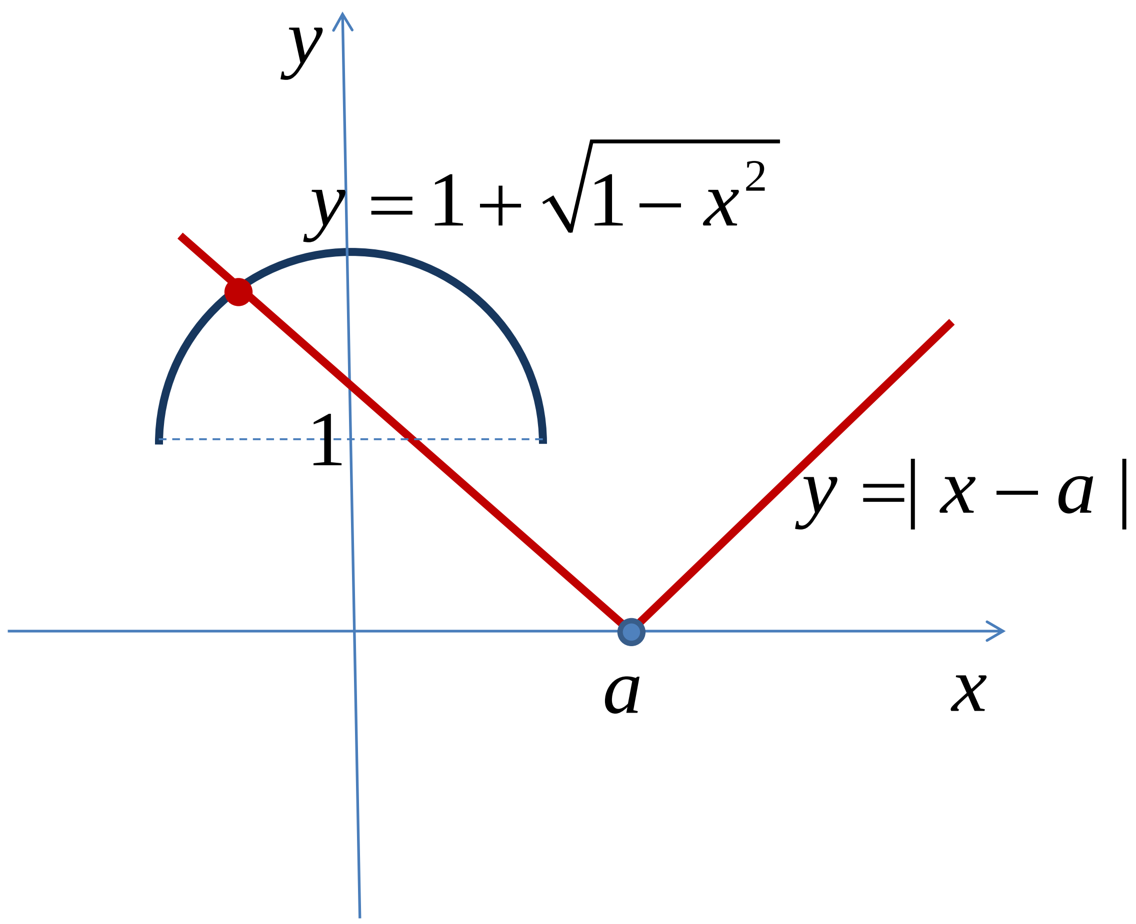
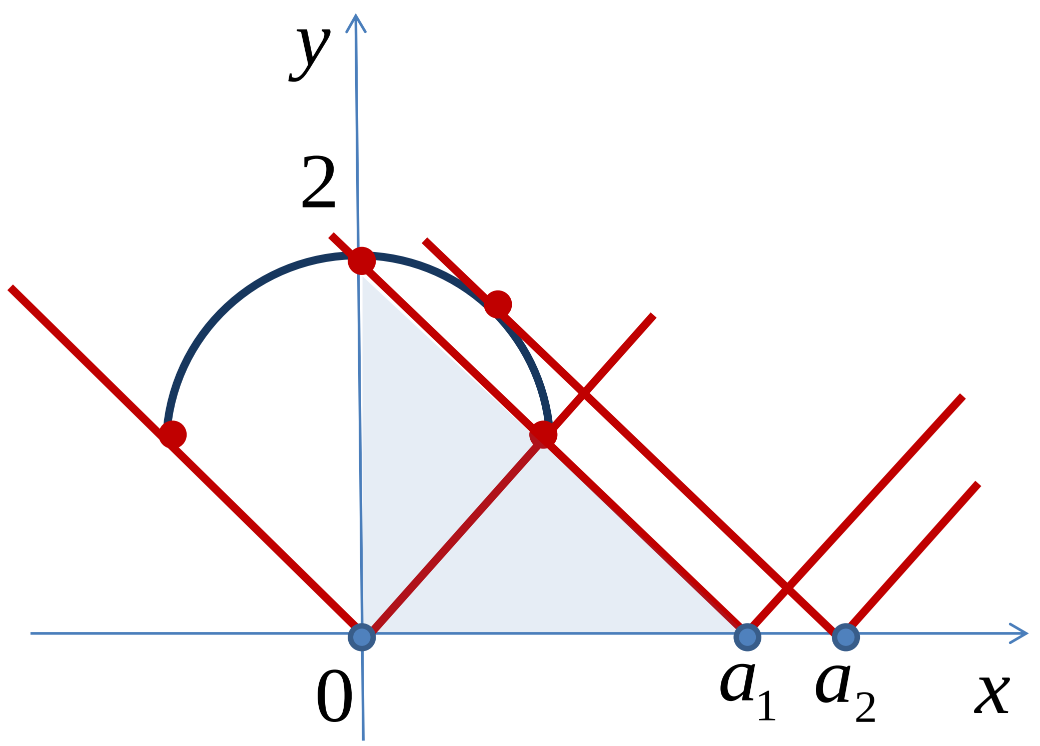


График первой функции есть верхняя единичная полуокружность с центром $(0, 1)$, а второй — галочка с вершиной в точке $(a, 0)$ и ветвями под углом $\pm 45^\circ$ к оси абсцисс (точнее, целое семейство таких галочек)

Требуется, чтобы эти графики имели ровно одну общую точку

Из рисунка видно, что для ответа на поставленный вопрос особую роль играют три значения параметра

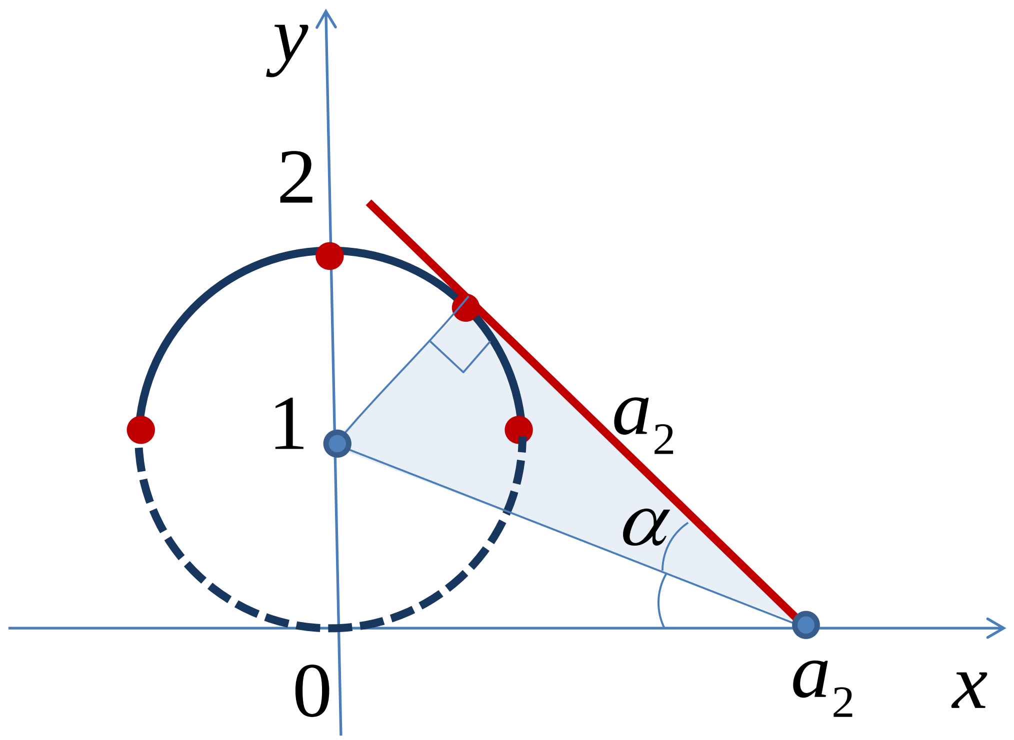
$$a = 0, a_1, a_2$$



Значение $a_1 = 2$ находится геометрически, из равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 2

Значение a_2 находится также геометрически, из прямоугольного треугольника с катетами 1, a_2 и острым углом $\alpha = 45^\circ/2$:

$$a_2 = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 1 + \sqrt{2}$$



Ответ: $0 < a < 2, \quad a = 1 + \sqrt{2}$

Координатная плоскость: параметр как координата

Задача 5. *Найдите все значения a, при каждом из которых всякое решение неравенства*

$$x^2 < a + 7$$

удовлетворяет и неравенству

$$ax < 6$$

Алгебраический подход:
решить каждое неравенство при каждом значении параметра и определить, для каких его значений множество решений первого неравенства содержится во множестве решений второго

Возможное упрощение:
разобрать разные случаи, при которых каждое неравенство решается просто

Трудность:
перебор случаев утомителен и возникают иррациональные неравенства

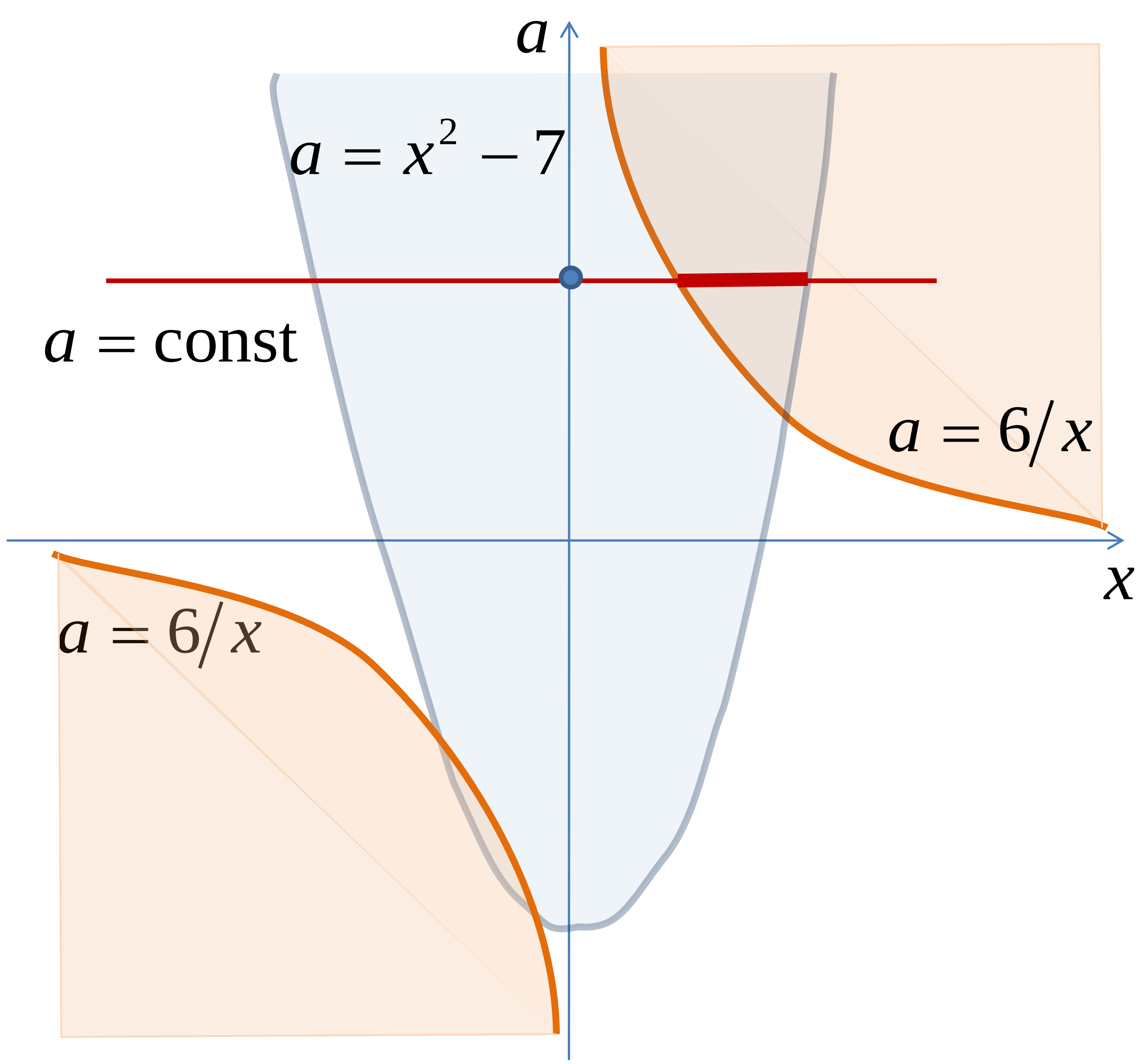
Задача 5. *Найдите все значения а, при каждом из которых всякое решение неравенства*

$$x^2 < a + 7$$

удовлетворяет и неравенству

$$ax < 6$$

Решение. На плоскости с координатами (x, a) изобразим области, где выполнено первое и второе неравенство соответственно



Первое неравенство задаёт все точки внутри параболы $a = x^2 - 7$, а второе — между двумя ветвями гиперболы $a = 6/x$

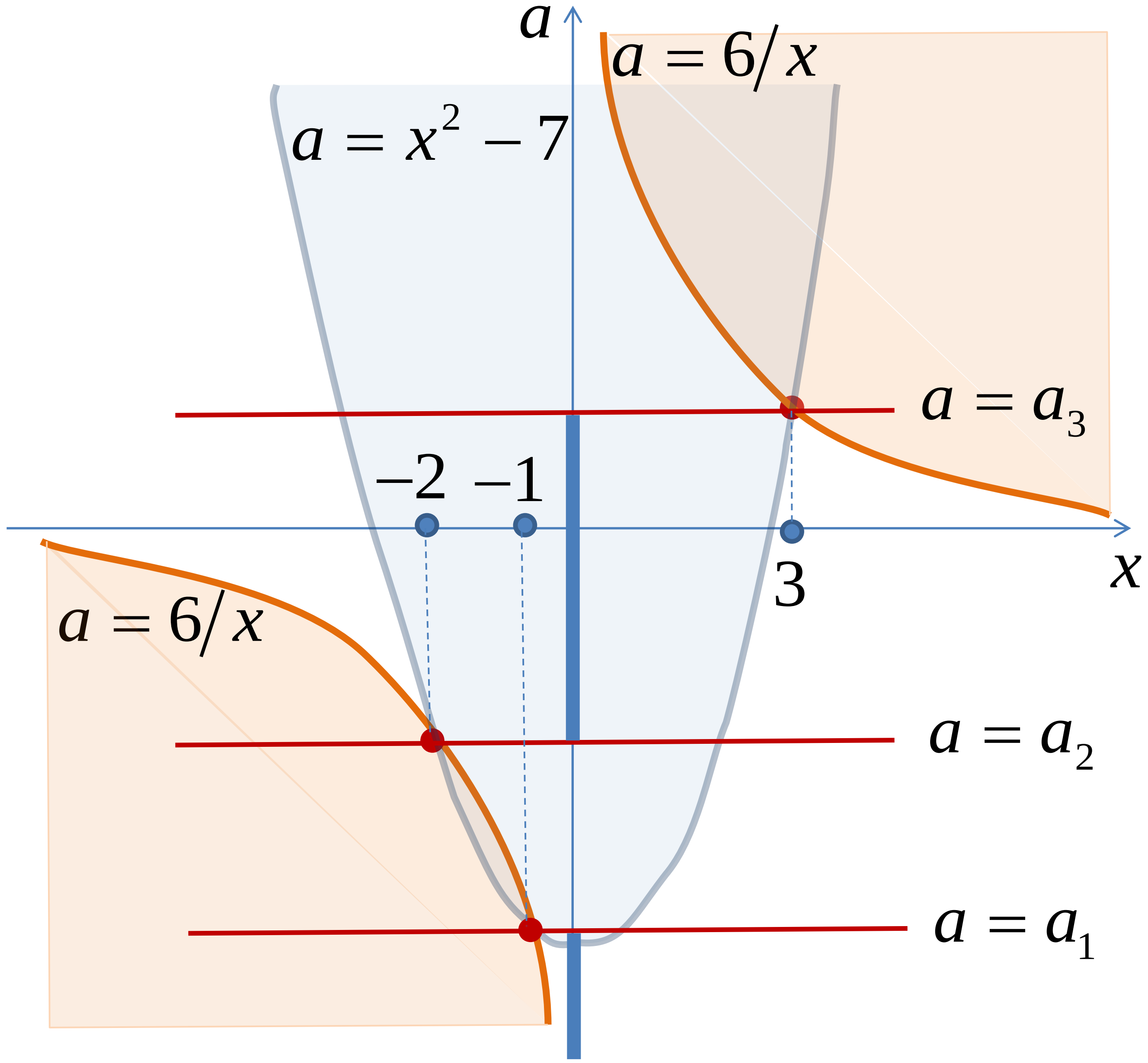
Ищем такие значения параметра, для которых горизонтальная прямая не имеет точек, принадлежащих первой области, но не принадлежащих второй

Координатная плоскость: параметр как координата

Из рисунка видно, что для ответа на поставленный вопрос нужно найти три ключевых значения параметра

$$a = a_1, a_2, a_3$$

соответствующие точкам пересечения параболы с гиперболой



Найдём эти точки

$$x^2 - 7 = 6/x \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)\,(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1, -2,\ 3$$

Отсюда соответственно получаем

$$a = 6/x = -6, -3,\ 2.$$

Ответ: $a \le -6,\ -3 \le a \le 2$

Тригонометрическая окружность: расположение корней

Задача 6. *Найдите все значения a, для каждого из которых все положительные корни уравнения*

$$\sin^2 x + (1-a)\sin x = a$$

образуют арифметическую прогрессию

Алгебраический подход:
решить данное уравнение при каждом значении параметра и выбрать те его значения, при которых положительные корни образуют арифметическую прогрессию

Возможное упрощение:
сначала рассмотреть только те корни уравнения, которые принадлежат одному периоду синуса

Трудности:
нужно нумеровать корни именно в порядке строгого возрастания и учитывать возможные слияния корней из разных серий

Тригонометрическая окружность: расположение корней

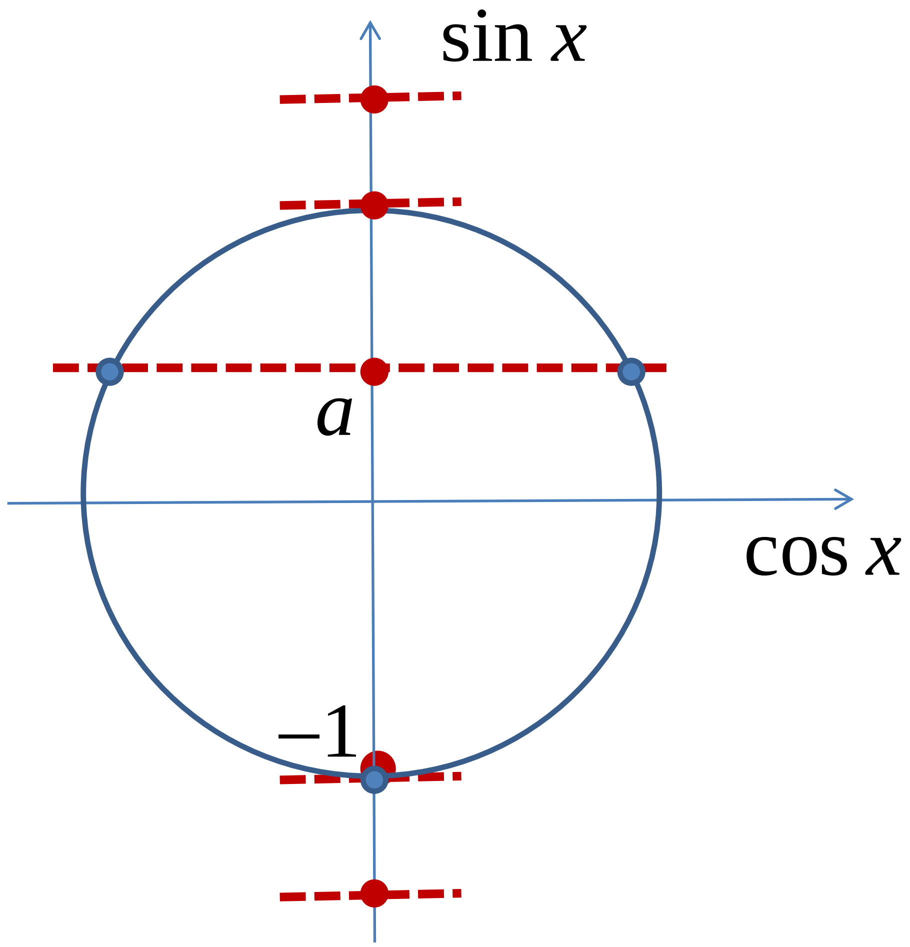
Задача 6. *Найдите все значения а, для каждого из которых все положительные корни уравнения*

$$\sin^2 x + (1 - a)\sin x = a$$

образуют арифметическую прогрессию

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(\sin x + 1)(\sin x - a) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x = -1,\ a.$$



Полученные два значения синуса задают одну, две или три точки окружности, в зависимости от значения *a*

Положительные корни этого уравнения образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда расстояние между соседними корнями на окружности одинаковы

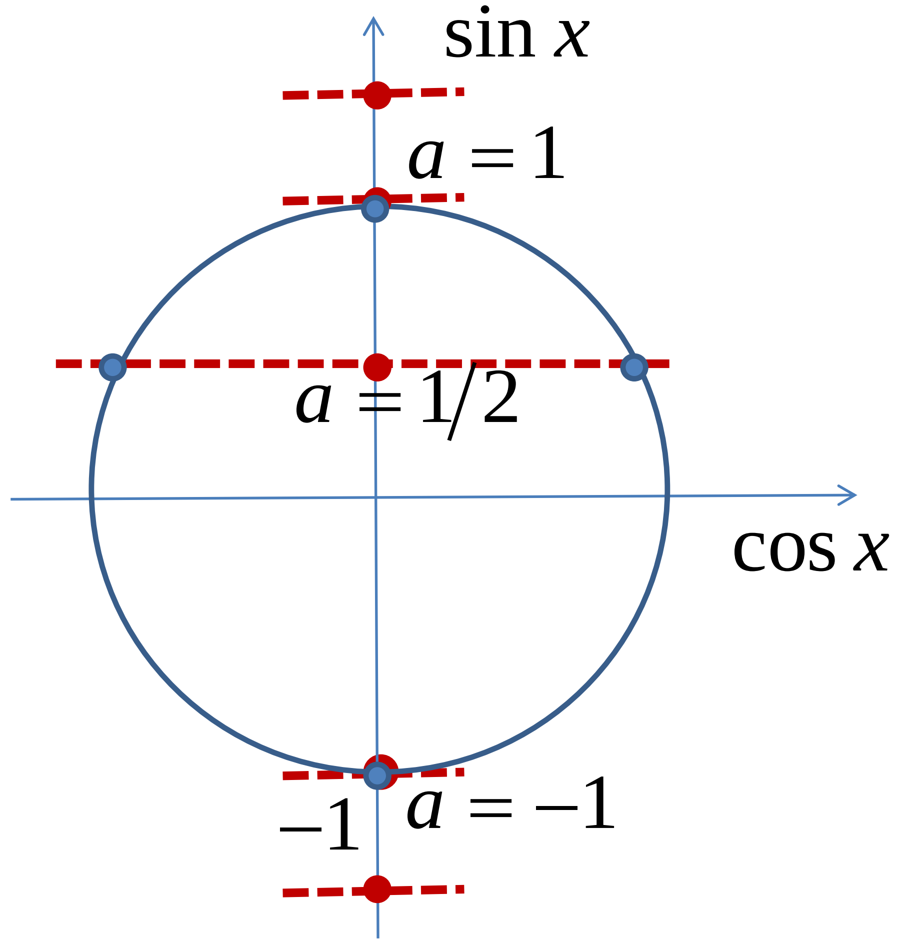
Тригонометрическая окружность: расположение корней

Все положительные корни, вместе с корнем $x_0 = 3\pi/2$ из первой серии, образуют арифметическую прогрессию в следующих трёх случаях:

1) число точек на окружности равно 3, что означает наличие у второй серии корня $x = \pi/6$, т. е. $a = 1/2$

2) число точек на окружности равно 2, что означает наличие у второй серии корня $x = \pi/2$, т. е. $a = 1$

3) число точек на окружности равно 1, что означает либо полное отсутствие у второй серии корней, т. е. $|a| > 1$, либо их слияние с корнями первой серией , т. е. $a = -1$



Ответ: $a \leq -1,\ \ a = 1/2,\ \ a \geq 1$

Тригонометрический круг: выход в плоскость

Задача 7. *Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение*

$$\sin x = a\cos x - 2$$

не имеет ни одного решения на отрезке $[0, \pi/2]$

Алгебраический подход:
решить уравнение при каждом значении параметра и определить, при каких значениях параметра множество корней не пересекается с заданным отрезком

Возможное упрощение:
для исследования полученных серий корней можно попробовать изобразить их на тригонометрической окружности

Трудность:
серии корней зависят от параметра, поэтому не понятно, как их изобразить в общем виде

Тригонометрический круг: выход в плоскость

Задача 7. *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

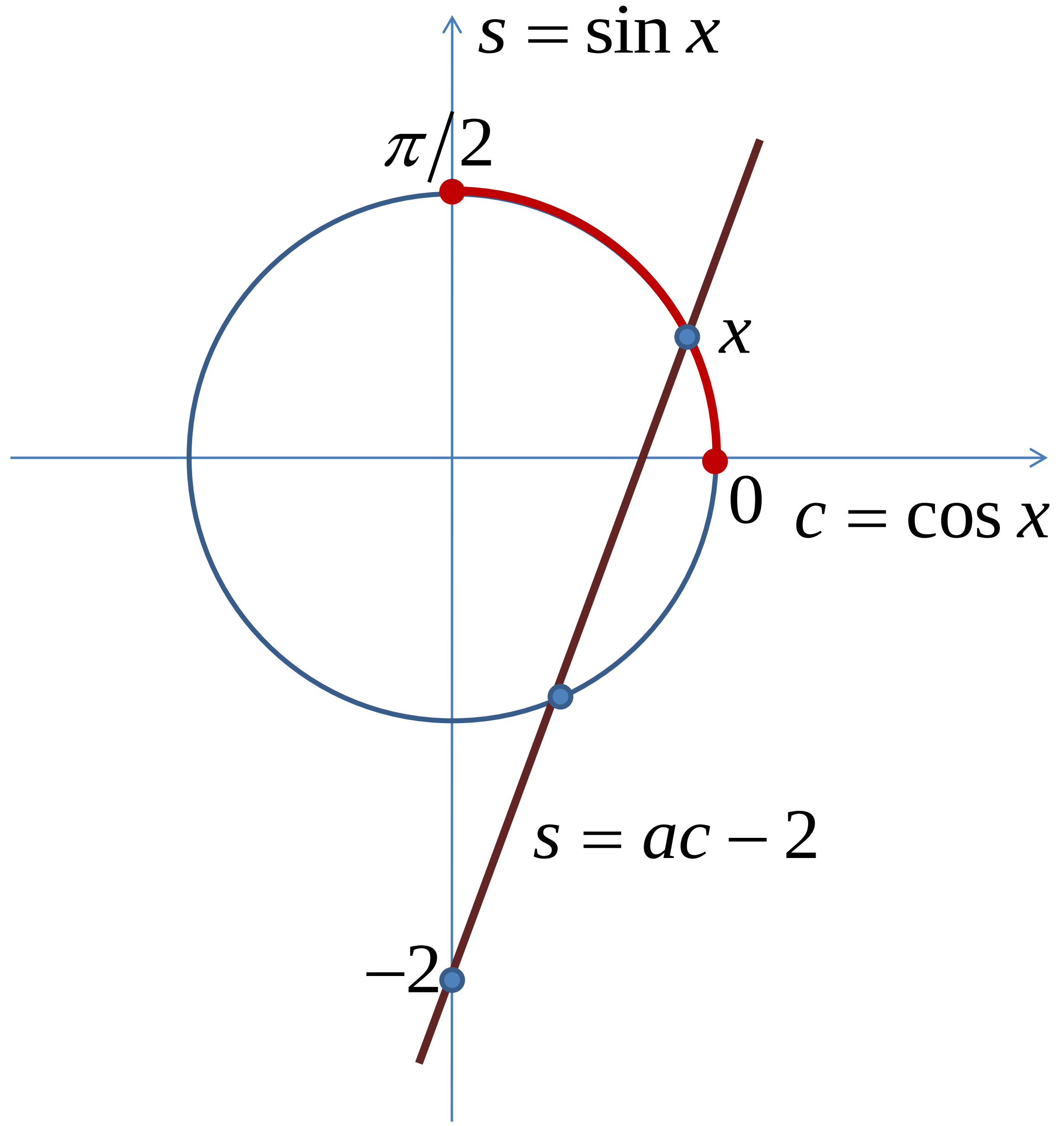
$$\sin x = a\cos x - 2$$

не имеет ни одного решения на отрезке $[0, \pi/2]$

Решение. Пусть $s = \sin x$ и $c = \cos x$. Тогда уравнение записывается в виде

$$s = ac - 2$$

и на плоскости с координатами (c, s) задаёт прямую, проходящую через точку -2 на оси ординат



Решения исходного уравнения изображаются точками пересечения данной прямой с окружностью — лишь они соответствуют реальным значениям синуса и косинуса

Заданный в условии отрезок изображается дугой окружности. На нём точек пересечения не должно быть

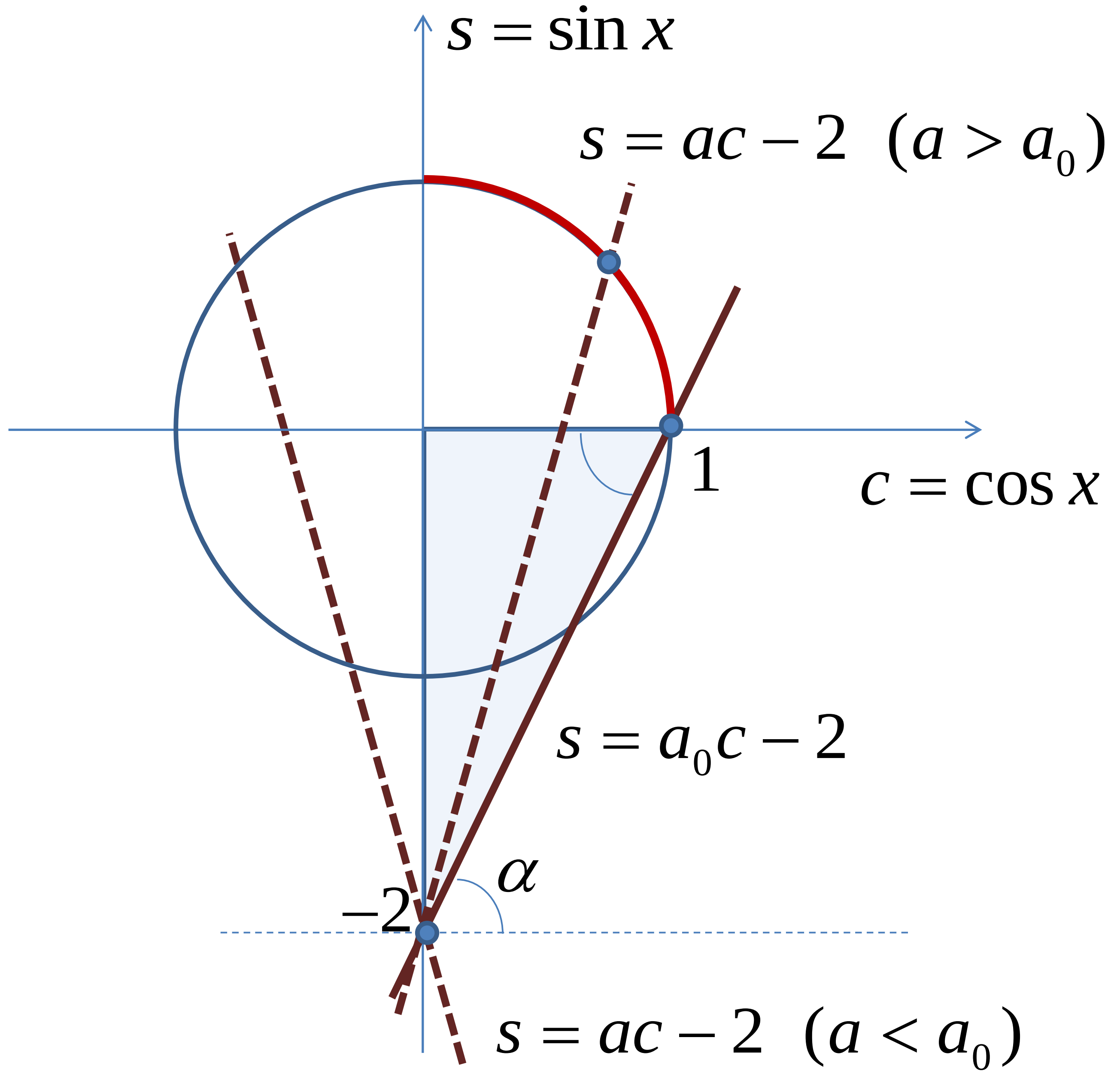
Тригонометрический круг: выход в плоскость

Из рисунка видно, что есть одно критическое положение данной прямой, при котором она проходит через точку 1 на оси абсцисс. Она задаёт критическое значение параметра $a = a_0$

При значениях параметра, меньших критического, решений на отрезке нет, а при больших — уже есть

Угловой коэффициент критической прямой ищется геометрически. Он равен тангенсу угла в прямоугольном треугольнике с катетами 1 и 2: $a_0 = \operatorname{tg}\alpha = 2$

Ответ: $a < 2$



Геометрический метод решения текстовых задач

Панфёров Валерий Семёнович
Кандидат физико-математических наук,
доцент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова,
ведущий научный сотрудник Центра математического образования МПГУ

Геометрический метод решения текстовых задач

Геометрический метод решения текстовых задач

В наборах задач, используемых на олимпиадах и различных экзаменах, включая ГИА и ЕГЭ, обязательно присутствуют так называемые текстовые задачи. Важный раздел таких задач – это задачи на движение и работу.

Решение текстовых задач, в отличие от решения стандартных по постановке алгебраических задач типа: решить уравнение (неравенство или систему), предполагает построение математической модели. В задачах на движение (особенно равномерное – движение с постоянной скоростью), математическая модель может быть очень наглядной, так как график движения в системе координат «время-расстояние» является ломаной (сплайном), звенья которого – отрезки прямых.

Не стоит рассчитывать, что графический метод является универсальным. Однако в ряде случаев этот метод успешно работает.

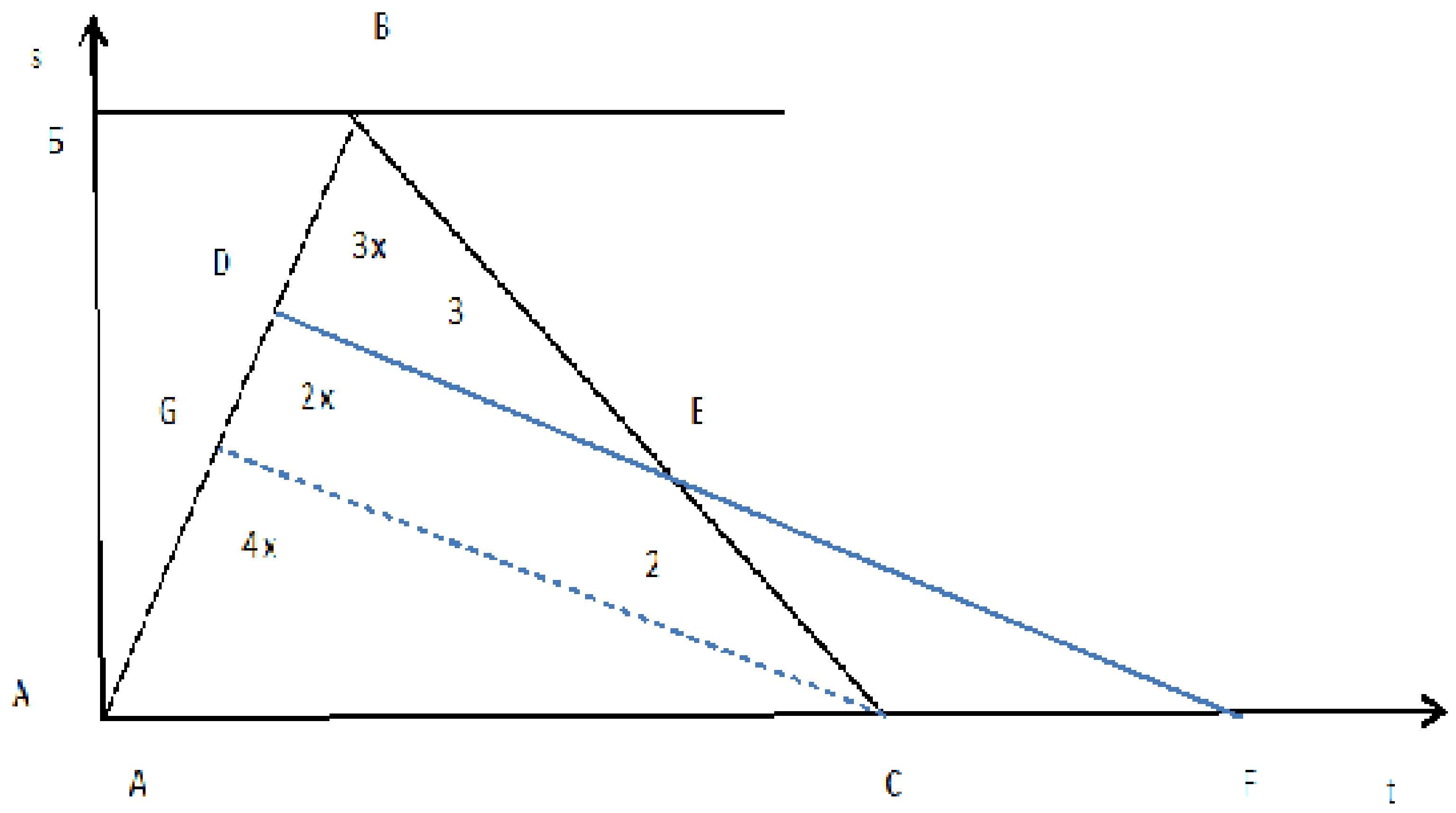
Лекция подготовлена совместно с кандидатом физико-математических наук, доцентом, старшим научным сотрудником Центра математического образования МПГУ Семёном Валерьевичем Панфёровым.

1. ДВИ МГУ -2016.

Ровно в 9-00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько велосипедист приедет в пункт А, если автобус прибыл в пункт А ровно в 11-00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Ответ: В 12-00

Решение. Графики движения автомобиля–отрезок AB, велосипедиста –отрезок DEFи автобуса–отрезок BC (в осях: время, расстояние) (s,t) изображены на рисунке.



Проведём $CG \parallel DE,$ тогда по теореме Фалеса $\frac{BD}{DG} = \frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}.$

Значит, если $BD = 3x,$ то $DG = 2x,$ а $AG = 4x.$

Откуда (опять по теореме Фалеса)

Так как $\frac{FC}{CA} = \frac{DG}{GA} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$, то $CA = 2,$

Читатели, знакомые с теоремой Менелая, смогут решить задачу так. Точки D,E и F лежат на одной прямой поэтому $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ или $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$

Значит $CF = \frac{FA}{3},$ т.е. $CF = 1.$

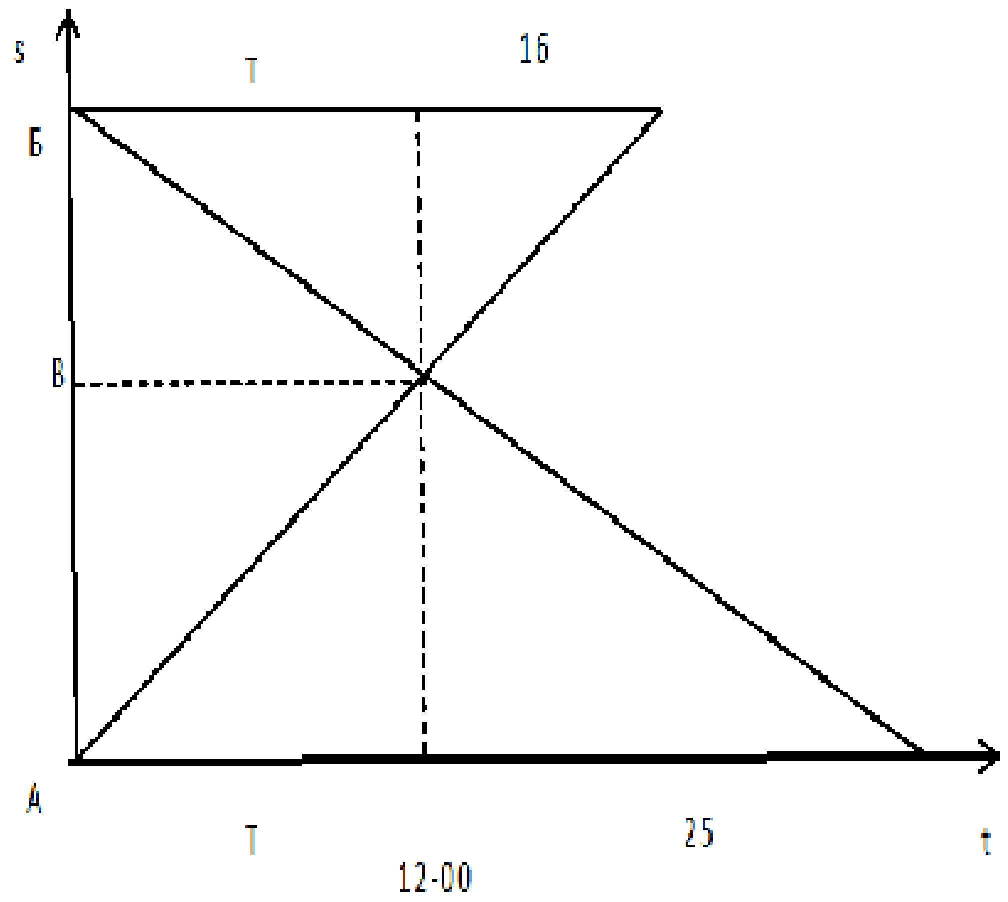
2. Олимпиада «Покори Воробьевы горы-2015».

Из пунктов А и Б одновременно на встречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились 2 февраля в 12-00. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всем пути постоянные, и один из них прибыл в Б 3 февраля в 4-00, а другой прибыл в А 3 февраля в 13-00.

Ответ: 1 февраля в 16-00.

Геометрический метод решения текстовых задач

Решение. Графики движения автобусов в осях: время, расстояние (s,t) изображены на рисунке.



Пусть $T\ (T>0)-$ время (в часах) в пути автобусов до их встречи в точке *В*. Так как при равномерном движении отношение длин пройденных путей равно отношению времен, затраченных на прохождение этих путей, то для автобуса, идущего из *А*: $\dfrac{AB}{BБ}=\dfrac{T}{16}$, а для автобуса, идущего из *Б*: $\dfrac{AB}{BБ}=\dfrac{25}{T}.$

Поэтому $\dfrac{T}{16}=\dfrac{AB}{BБ}=\dfrac{25}{T}\Leftrightarrow T^2=16\cdot 25.$ Значит $T=20.$

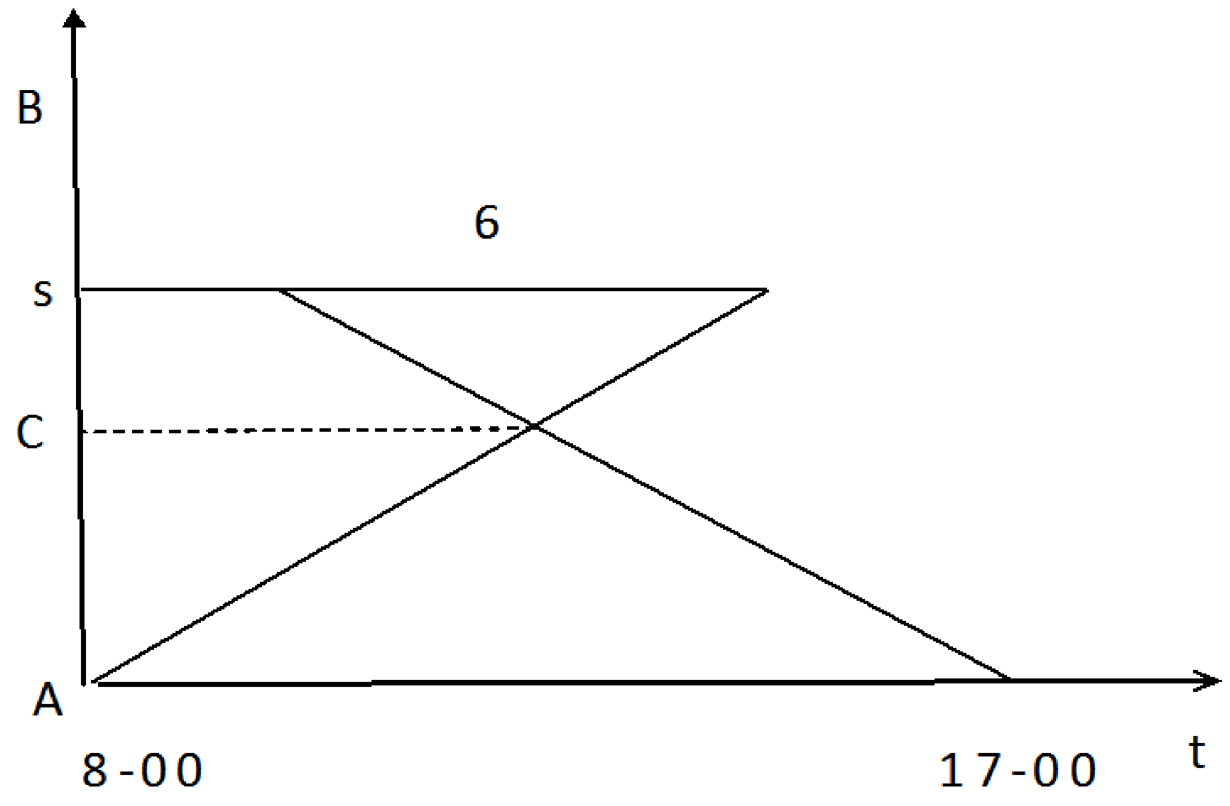
3. Олимпиада «Ломоносов-2006».

Из пункта A в пункт B в 8-00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17-00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

Ответ: $\frac{3}{5}.$

Геометрический метод решения текстовых задач

Решение. Графики движения велосипеда и пешехода в осях: время, расстояние (s,t) изображены на рисунке.



Из подобия треугольников с параллельными сторонами 9 и 6 получаем

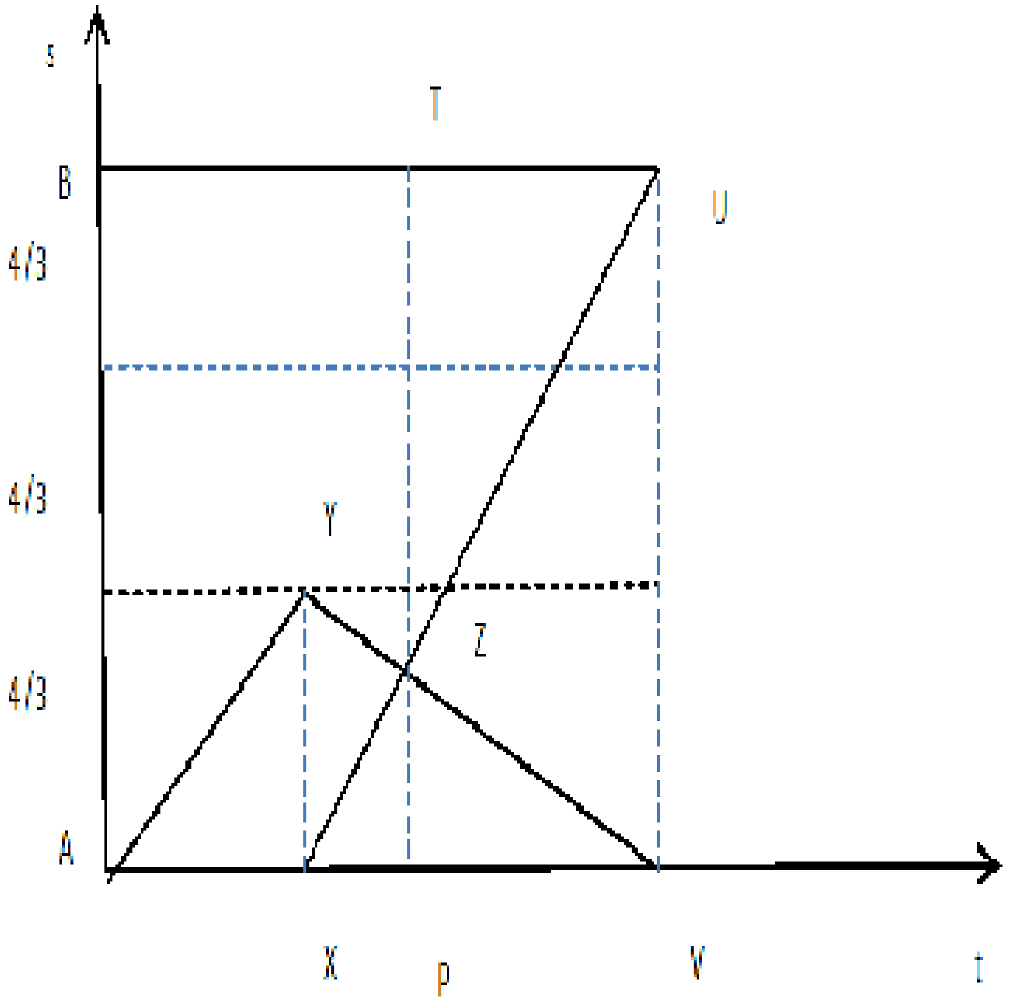
$$\frac{AC}{CB}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$ Значит $$\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}.$$

4. ДВИ МГУ -2015.

Василий выехал из пункта *A* в пункт *B* на велосипеде. Проехав треть пути, велосипед Василя сломался. Не теряя времени, Василий пошел пешком обратно в пункт *A*. В момент поломки из пункта *A* выехал мотоциклист Михаил. На каком расстоянии от пункта *A* он встретит Василия, если расстояние между пунктами *A* и *B* 4 км, скорости велосипедиста, мотоциклиста и пешехода постоянны, а Василий доберется до пункта *A* тогда же, когда Михаил до пункта *B*?

Ответ: 1 км

Решение. Графики движения Василия и Михаила в осях: (s,t) время, расстояние изображены на рисунке.



Ломаная AYV – график движения Василия, а отрезок XU – график движения Михаила $UV = PT = AB = 4.$

Так как треугольник XYZ подобен треугольнику UVZ,

то $\frac{XZ}{ZU} = \frac{XY}{UV} = \frac{1}{3}$, а так как треугольник XPZ подобен треугольнику UTZ ,

то $\frac{PZ}{ZT} = \frac{XZ}{ZU} = \frac{1}{3}$. Значит $PZ = \frac{UV}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

5. Задача ДВИ МГУ -2013.

В 14-00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее вышел катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось идти 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый» развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14-14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», «Смелый» развернулся и направились обратно в Нижнее. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14-18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если скорости катеров в стоячей воде одинаковые и постоянны.

Ответ: 2 км

Решение. Графики движения катеров в осях: (s,t) время, расстояние изображены на рисунке

Ломаная *ABC* – график движения «Быстрого», а ломаная *DEF* «Смелого». Пусть S расстояние (в километрах) от Верхнего до Нижнего, T - время (в минутах) движения «Быстрого» вниз по течению.

Из подобия треугольников *ABC* и *DEF*
$$\frac{S-\frac{1}{2}}{S-1}=\frac{18}{18-T}. \quad (1)$$

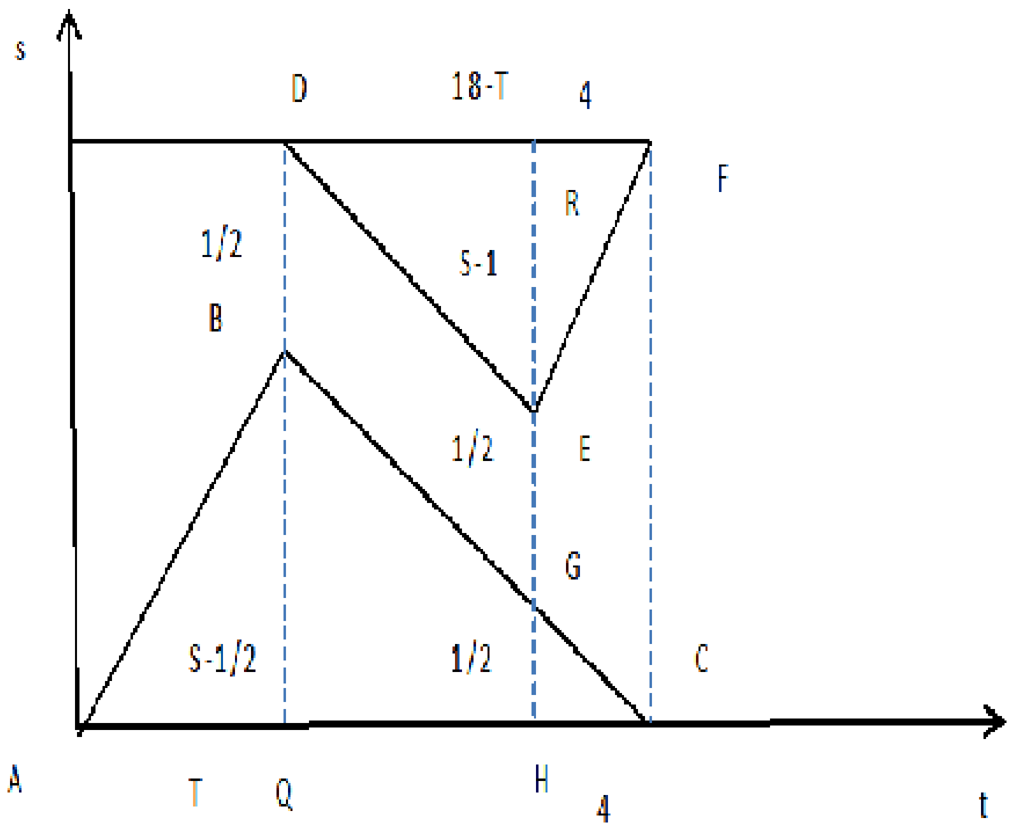
Из подобия треугольников CHG и CBQ $\frac{\frac{1}{2}}{S-\frac{1}{2}}=\frac{4}{18-T}.$ (2)

Из равенств (1) и (2) получаем
$$\frac{S-\frac{1}{2}}{S-1}=\frac{\frac{18}{8}}{S-\frac{1}{2}}=\frac{9}{4(S-\frac{1}{2})}\Leftrightarrow 4(S-\tfrac{1}{2})^2=9(S-1)\Leftrightarrow 4S^2-13S+10=0.$$

Значит или $S=2$, или $S=\frac{5}{4}$.

Так как *T* и 18 - T времена прохождения одного и того же пути по и против течения, то $T<18-T\Leftrightarrow T<9.$

Поэтому из (1) получаем $\frac{S-\frac{1}{2}}{S-1}=\frac{18}{18-T}<2\Leftrightarrow S>\frac{3}{2}.$



6. Олимпиада «Покори Воробьевы горы-2016».

Мотоциклист и велосипедист одновременно выезжают из п. *A*. Мотоциклист, доехав до п. *B*, сразу отправляется в п. *A*, доехав до п. *A*, сразу отправляется в п. *B* и т.д. После выезда из п. *A*, вплоть до приезда в п. *B*, велосипедист поравнялся с мотоциклистом ровно 5 раз. В каких пределах может находиться отношение скоростей мотоциклиста велосипедиста, если скорости их движения постоянны.

Ответ: Скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста в *k раз , где* $5<k<7$.

Решение. Графики движения мотоциклиста и велосипедиста в осях: $(s;t)$ время, расстояние изображены на рисунке.

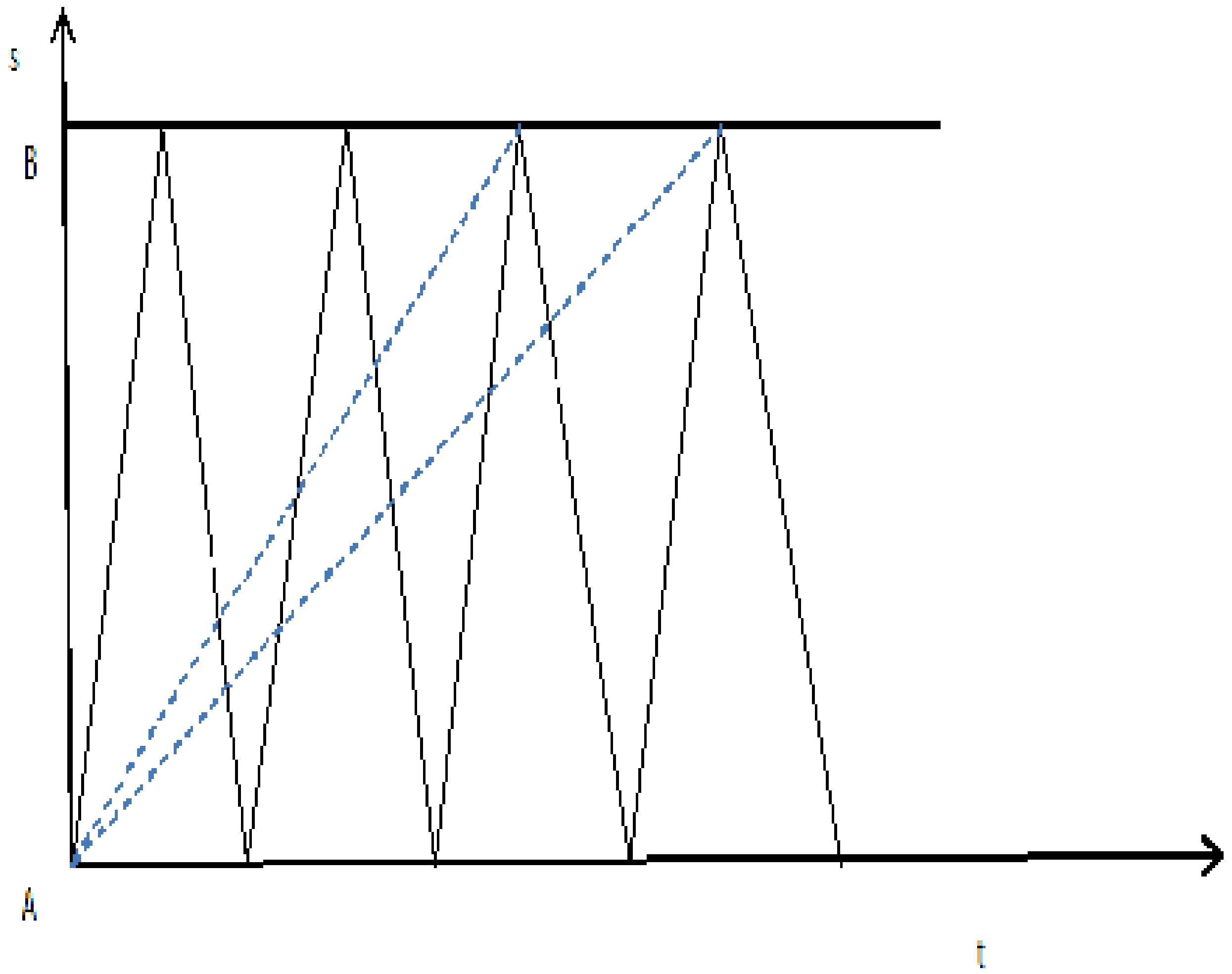


График движения мотоциклиста – ломаная, состоящая из одинаковых отрезков. Граничные виды графика движения велосипедиста изображены пунктиром. Из рисунка видно, что при движении по этим графикам, велосипедисту на путь из п. *A* в п. *B* требуется соответственно в 5 и в 7 раз больше времени, чем мотоциклисту.